

Capítulo 16

La Teoría de Pólya

Perseveramos, querido lector, en ocupar su atención con la cuestión a la que dedicamos el capítulo anterior, a saber, la de contar coloraciones teniendo en cuenta ciertas simetrías. Es buen momento para sugerir la (¿re?-)lectura del citado capítulo, si es que el lector quiere recordar cuán útil resultó entonces el lema cuenta-órbitas de Burnside. Ocurre que, en muchas aplicaciones, es necesario un mayor nivel de detalle: no basta contar cuántas coloraciones no equivalentes por simetrías hay, sino que es necesario clasificarlas atendiendo a ciertas propiedades. Ésta es la razón de ser de la llamada Teoría de Pólya¹, a la que dedicamos este capítulo.

¿Cuánto detalle se precisa? Bueno, sin exagerar; se trata de una información muy natural. Como ya hicimos en el ejemplo 15.3.5, interesará averiguar no sólo cuántas coloraciones no equivalentes se pueden formar con r colores, sino contar cuántas de ellas tienen un número especificado de repeticiones de cada color. *El teorema de Pólya de coloraciones* (teorema 16.4) dilucidará este reto. Para incitar el interés del lector apuntamos que este teorema nos permitirá resolver, en la sección 16.3.2, una cuestión delicada, que apenas esbozamos en la subsección 8.1.2: la enumeración de los grafos no isomorfos con un número dado de vértices.

No nos conformaremos con esto, sino que abordaremos, ya puestos, el análisis de las *decoraciones*. Una decoración de un conjunto \mathcal{X} asigna a cada elemento, no ya un color, sino una pieza con cierta estructura interna de partes coloreadas. Querremos averiguar cuántas decoraciones no equivalentes (por un grupo de simetrías de \mathcal{X}) tienen, en total, un número especificado de repeticiones de cada color. *El teorema de Pólya de decoraciones* (teorema 16.5) resolverá esta cuestión. En la subsección 16.4.3 se usará este teorema para contar árboles con raíz no isomorfos y se mostrarán algunas aplicaciones al análisis de estructuras químicas.

¹¡Epónimos en Matemáticas! George (en su original húngaro, György) Pólya, quien ha aparecido en repetidas ocasiones en estas páginas (véase su nota biográfica en la página 114), presentó los resultados de la teoría que hoy lleva su nombre en 1937. Aunque antes, en 1927, John H. Redfield, músico y lingüista americano, y en cierta etapa de su vida interesado por la Combinatoria, publicó resultados similares, que en su momento pasaron casi inadvertidos. Quizás porque su exposición no era tan clara, o quizás porque no adelantó sus aplicaciones (Pólya se preocupó inmediatamente por las conexiones con la Química). Cabe preguntarse si es merecedor de dar nombre a una idea o un resultado aquél que lo introduce por primera vez o quien es capaz de articularlo, comprender su importancia y perseverar en su divulgación. Sin entrar a juzgar los méritos de Redfield, creemos que, por muchas razones, Pólya merece el reconocimiento de apadrinar esta teoría.

Finalmente, la sección 16.5 se dedicará a una generalización natural de esta teoría de Pólya, debida a De Bruijn, en la que además permitiremos la identificación de colores mediante su propio grupo de simetrías. A esta situación nos referiremos como *decoloraciones*, y como comprobará el lector, el análisis que allí haremos nos permitirá abordar ciertas cuestiones de distribuciones de bolas en cajas en las que tanto las bolas como las cajas pueden o no distinguirse.

Para alcanzar el nivel de detalle que perseguimos ahora, las funciones generatrices, con su extraordinaria capacidad de codificación de información combinatoria y su flexibilidad para trasladar conteo combinatorio en manipulación algebraica de polinomios o series de potencias, devendrán en un aliado fiel al que recurriremos con insistencia.

16.1. Inventario de coloraciones de un conjunto

Presentamos sin dilación los ingredientes del problema. Tenemos un conjunto \mathcal{X} de tamaño n , digamos el habitual $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, n\}$. Disponemos además de r colores, y con ellos coloreamos \mathcal{X} . El conjunto de estas coloraciones, al que nos referimos con el símbolo $Col_r(\mathcal{X})$, es el conjunto de aplicaciones de \mathcal{X} en el conjunto de los r colores; en otras palabras, las n -listas con símbolos extraídos del conjunto de los r colores. Tenemos además un grupo de simetrías G de \mathcal{X} , al que además, tal y como vimos en el capítulo 15, podemos considerar de manera natural y canónica como un grupo de simetrías de $Col_r(\mathcal{X})$.

A cada coloración ω en $Col_r(\mathcal{X})$ le asociamos un monomio² de r variables (tantas como colores):

$$x_1^{n_1(\omega)} x_2^{n_2(\omega)} \dots x_r^{n_r(\omega)}$$

donde cada exponente $n_j(\omega)$ es el número de elementos de \mathcal{X} que reciben el color j en la coloración ω . Como ω asigna color a cada elemento de \mathcal{X} , el grado total del monomio será

$$n_1(\omega) + n_2(\omega) + \dots + n_r(\omega) = n \quad \text{para cada } \omega \in Col_r(\mathcal{X}).$$

Consideremos ahora un cierto conjunto Ω de coloraciones de \mathcal{X} con r colores, $\Omega \subset Col_r(\mathcal{X})$. En principio, no imponemos estructura alguna a Ω , aunque más adelante, por supuesto, Ω serán coloraciones no equivalentes por la acción del grupo de simetrías (o, también, coloraciones que quedan fijas por el grupo de simetrías). El **inventario de un conjunto de coloraciones Ω** es la siguiente función generatriz:

$$I_\Omega(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{\omega \in \Omega} x_1^{n_1(\omega)} x_2^{n_2(\omega)} \dots x_r^{n_r(\omega)}$$

la suma de los monomios correspondientes a cada coloración. Se trata de un polinomio en r variables, homogéneo³ y de grado n . Obsérvese que

$$I_\Omega(1, 1, \dots, 1) = |\Omega|.$$

²Acabamos de entrar en modo *función generatriz*.

³Es decir, $I_\Omega(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_r) = \lambda^n I_\Omega(x_1, x_2, \dots, x_r)$, pues los monomios tienen grado total $n = |\mathcal{X}|$.

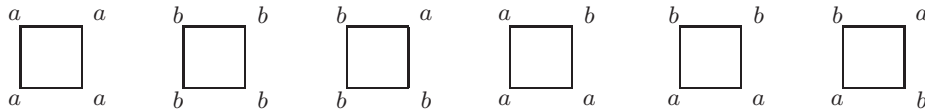
Los coeficientes de I_Ω son, a primera vista, todos 1. Pero, agrupando los términos con el mismo monomio, obtenemos unos coeficientes con una interesante información combinatoria: el coeficiente de $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$ en I_Ω cuenta el número de coloraciones distintas en Ω (podría no haber ninguna) en las que el color j aparece n_j veces, para cada $j = 1, 2, \dots, r$. Es decir,

$$I_\Omega(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_r = n \\ n_1, \dots, n_r \geq 0}} \# \left\{ \begin{array}{l} \text{Coloraciones en } \Omega \text{ donde el} \\ \text{color } j \text{ aparece } n_j \text{ veces} \\ j = 1, 2, \dots, r \end{array} \right\} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$$

Éste será el objeto central de este capítulo. Si conociéramos explícitamente I_Ω , en sus coeficientes estarían codificadas cuántas coloraciones de Ω tienen cada posible combinación de colores. Pero claro, la dificultad, en general, estriba en calcular I_Ω . Veremos más adelante que, cuando Ω sea un conjunto de coloraciones no equivalentes por G , podemos obtener I_Ω a partir del análisis de los ciclos de las simetrías de G (nótese el paralelismo con lo hecho en el capítulo 15). Pero antes, analicemos unos ejemplos en los que ya conocemos o resulta especialmente sencillo enumerar las coloraciones.

EJEMPLO 16.1.1 *El inventario de las coloraciones (con 2 colores) de los vértices de un cuadrado no equivalentes por rotaciones.*

Recordamos, del ejemplo 15.0.2, las 6 coloraciones (llamando a y b a los dos colores):



En este caso, el inventario de este conjunto de coloraciones Ω es

$$I_\Omega(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + x_1^3 x_2 + x_1 x_3^3 + x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^2 = x_1^4 + x_2^4 + x_1^3 x_2 + x_1 x_3^3 + 2 x_1^2 x_2^2.$$

Por ejemplo, el coeficiente 1 de x_1^4 nos dice que hay una coloración con todos los vértices de color a . El coeficiente 2 del último término $x_1^2 x_2^2$ simplemente nos dice que hay 2 coloraciones en Ω en las que cada color aparece 2 veces. Todos los monomios tienen grado total 4, y por supuesto, $I_\Omega(1, 1) = 6 = |\Omega|$. ♣

EJEMPLO 16.1.2 *El inventario de **todas** las coloraciones, con r colores, de $\mathcal{X} = \{1, \dots, n\}$.*

Tomamos $\Omega = \text{Col}_r(\mathcal{X})$. Determinar una coloración en la que, para cada $j = 1, \dots, r$, el color j aparece n_j veces (los n_j son enteros no negativos cuya suma vale n) es lo mismo que distribuir los elementos de \mathcal{X} en r cajas numeradas (una por color) de manera que haya n_1 elementos en la primera caja, n_2 en la segunda, etc. Como bien sabemos, hay $\binom{n}{n_1, \dots, n_r}$ distribuciones con estas características, así que el inventario de todas las coloraciones es

$$I_\Omega(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_r = n \\ n_1, \dots, n_r \geq 0}} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r} = (x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n,$$

donde en la última igualdad hemos utilizado la fórmula del multinomio. Si tomamos $x_1 = \dots = x_r = 1$, recuperamos el número total de coloraciones, $|\Omega| = r^n$. ♣

(versión preliminar 25 de diciembre de 2008)

La utilidad del siguiente ejemplo de inventario de coloraciones de un conjunto merece que lo elevemos a la categoría de lema

Lema 16.1 (Inventario de coloraciones por bloques) *Consideremos un conjunto \mathcal{X} y una partición de \mathcal{X} en s bloques no vacíos: A_1, A_2, \dots, A_s . Nos interesa el inventario del conjunto Ω de las coloraciones de \mathcal{X} con r colores en las que los elementos de cada bloque A_i reciben todos el mismo color. Para cada $j = 1, \dots, s$, llamemos m_j al tamaño del bloque A_j . Entonces*

$$I_{\Omega}(x_1, x_2, \dots, x_r) = (x_1^{m_1} + \dots + x_r^{m_1}) \cdot (x_1^{m_2} + \dots + x_r^{m_2}) \cdots (x_1^{m_s} + \dots + x_r^{m_s}).$$

Obsérvese que hay $I_{\Omega}(1, \dots, 1) = r^s$ coloraciones de este tipo (las distintas maneras de asignar un color, de entre los r posibles, a cada uno de los s bloques).

DEMOSTRACIÓN. Comprobemos que, efectivamente, el inventario tiene la expresión que hemos exhibido más arriba en el caso $s = 2$, que ya contiene el argumento general. Supongamos que tenemos sólo dos colores a y b , primer y segundo color respectivamente. Sólo hay cuatro coloraciones en Ω , según le asignemos a A_1 y a A_2 los colores a y b . Los monomios asociados son

$$x_1^{m_1} x_1^{m_2}, \quad x_1^{m_1} x_2^{m_2}, \quad x_2^{m_1} x_1^{m_2} \quad \text{y} \quad x_2^{m_1} x_2^{m_2}$$

(por ejemplo, el primer monomio se corresponde con colorear A_1 y A_2 con el primer color), cuya suma podemos reescribir como

$$x_1^{m_1} x_1^{m_2} + x_1^{m_1} x_2^{m_2} + x_2^{m_1} x_1^{m_2} + x_2^{m_1} x_2^{m_2} = (x_1^{m_1} + x_2^{m_1}) (x_1^{m_2} + x_2^{m_2}).$$

Si tuviéramos tres colores, habría 9 posibles coloraciones (las distintas formas de asignar color a A_1 y A_2); la suma de los nueve monomios correspondientes,

$$\begin{aligned} & x_1^{m_1} x_1^{m_2}, \quad x_1^{m_1} x_2^{m_2}, \quad x_1^{m_1} x_3^{m_2}, \\ & x_2^{m_1} x_1^{m_2}, \quad x_2^{m_1} x_2^{m_2}, \quad x_2^{m_1} x_3^{m_2}, \\ & x_3^{m_1} x_1^{m_2}, \quad x_3^{m_1} x_2^{m_2}, \quad x_3^{m_1} x_3^{m_2}, \end{aligned}$$

da lugar a

$$(x_1^{m_1} + x_2^{m_1} + x_3^{m_1}) \cdot (x_1^{m_2} + x_2^{m_2} + x_3^{m_2}).$$

Argumentos análogos permiten obtener expresiones semejantes cuando tenemos más de 3 colores; o bien, cuando hay más de dos bloques en la partición, $s > 2$. ■

El ejemplo 16.1.2, en el que considerábamos todas las posibles coloraciones, es un caso particular de este lema 16.1 cuando $s = |\mathcal{X}|$ y cada $m_j = 1$, es decir, cuando cada elemento de \mathcal{X} da lugar por sí solo a un bloque de la partición. Así obtenemos el inventario

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^{|\mathcal{X}|}.$$

Otro caso extremo del lema 16.1 es aquél en que sólo hay un bloque en la partición, el propio \mathcal{X} al completo. Ahora hay tantas coloraciones como colores, pues basta decidir el color que le asignamos a *todos* los elementos de \mathcal{X} , y el inventario es la función generatriz

$$x_1^{|\mathcal{X}|} + x_2^{|\mathcal{X}|} + \dots + x_r^{|\mathcal{X}|}.$$

(versión preliminar 25 de diciembre de 2008)

El lector atento, ¡pequeño saltamontes!, imbuido como está de la filosofía de contar con simetrías, conoce el camino que lleva a la luz, y sabe que para contar (o inventariar) lo desigual (las órbitas no equivalentes) hay que centrar la atención en contar (inventariar) lo inmutable y fijo (los puntos fijos). Así que no sorprenderá que nos interese ahora por el inventario del conjunto Ω_g **de las coloraciones que quedan fijas por g** (esto es, $\Omega_g = F(g)$). Recogemos el resultado en el siguiente lema, corolario⁴ del lema anterior 16.1, y que será la clave de la demostración del teorema de Pólya de inventario de coloraciones.

Lema 16.2 (Inventario de coloraciones fijadas por una g) *El inventario de las coloraciones con r colores que quedan fijas por una simetría g cualquiera de \mathcal{X} se escribe*

$$I_{\Omega_g}(x_1, x_2, \dots, x_r) = y_1^{c_1(g)} y_2^{c_2(g)} \dots y_n^{c_n(g)}$$

donde para cada $j = 1, 2, \dots, n$, $c_j(g)$ denota el número de ciclos de longitud j de g y donde cada variable y_j , para $j = 1, 2, \dots, n$, representa a

$$y_j = x_1^j + x_2^j + \dots + x_r^j.$$

De repente aparece, como descendido de los cielos, un resultado pletórico de estructura, con un cambio de variables inesperado y peculiar. Tenue luz que señala la senda verdadera.

DEMOSTRACIÓN. Detallemos el argumento. Consideremos una simetría g cualquiera del conjunto \mathcal{X} . Esta simetría g , como permutación de \mathcal{X} que es, se descompone en ciclos que forman una partición de \mathcal{X} en bloques no vacíos. Digamos que hay s ciclos que (como conjuntos) denotaremos por A_1, A_2, \dots, A_s , y sean m_1, \dots, m_s sus respectivas longitudes. El conjunto Ω_g está formado por aquellas coloraciones de \mathcal{X} en las que los elementos de cada A_i reciben el mismo color. Así que, por el lema 16.1, el inventario de Ω_g se escribe

$$I_{\Omega_g}(x_1, x_2, \dots, x_r) = \prod_{j=1}^s (x_1^{m_j} + \dots + x_r^{m_j}).$$

Podemos compactar esta expresión considerando unas nuevas variables y_k , que vienen dadas, para cada $k = 1, 2, \dots$, por

$$y_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_r^k,$$

para obtener que

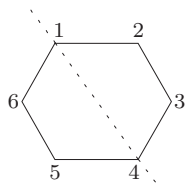
$$I_{\Omega_g}(x_1, x_2, \dots, x_r) = \prod_{j=1}^s y_{m_j}.$$

Entre los s ciclos, los habrá de diversas longitudes. Por ejemplo, los de longitud 1 (hay $c_1(g)$ de ellos) contribuyen al producto anterior con $c_1(g)$ factores y_1 . Los de longitud 2 aportarán $c_2(g)$ factores del tipo y_2 . Y así sucesivamente. Por lo que podemos reescribir el inventario de Ω_g como

$$I_{\Omega_g}(x_1, x_2, \dots, x_r) = y_1^{c_1(g)} y_2^{c_2(g)} \dots y_n^{c_n(g)} \quad \blacksquare$$

⁴El lector sagaz captará enseguida que en realidad los lemas 16.2 y 16.1 son equivalentes, porque una partición en bloques no vacíos define la descomposición en ciclos de una (muchas) simetrías.

En lo que sigue, haremos uso frecuente de la notación $c_j(g) = \#\{\text{ciclos de longitud } j \text{ de } g\}$ que acabamos de introducir en el enunciado del lema. Conviene que nos detengamos brevemente a discutirla. Primero, si $j > n$, $c_j(g) = 0$, pues no puede haber ciclos que contengan más del número total de elementos. $c_1(g)$ es, simplemente, el número de puntos fijos de g : $c_1(g) = |F(g)|$. Y como los ciclos de una simetría $g \in G$ son disjuntos, $\sum_{j=1}^n j c_j(g) = n$.



Si, por ejemplo, $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, 6\}$ son los vértices de un hexágono, ordenados circularmente, y consideramos (véase la figura) la simetría g de reflexión en el eje que une los vértices 1 y 4, entonces

$$c_1(g) = c_2(g) = 2, \quad c_i(g) = 0, \quad i \geq 3,$$

porque los vértices 1 y 4 quedan fijos, mientras que hay dos ciclos de longitud dos, $\textcircled{2}_6(26)$ y $\textcircled{2}_6(35)$. Obsérvese que $1c_1(g) + 2c_2(g) = 2 + 4 = 6$. Pero si g es la rotación de 60 grados en sentido antihorario, entonces $c_i(g) = 0$ si $i \neq 6$, mientras que $c_6(g) = 1$.

Veamos un par de ejemplos de aplicación del lema 16.2. Digamos que $\mathcal{X} = \{1, \dots, n\}$ y sea $g = \text{id}$. La identidad tiene n ciclos de longitud 1, y por supuesto fija todas las coloraciones de $\text{Col}_r(\mathcal{X})$. Aplicando el lema 16.2, recuperamos el resultado del ejemplo 16.1.2:

$$I_{\text{Col}_r(\mathcal{X})}(x_1, \dots, x_r) = I_{\Omega_{\text{id}}}(y_1, \dots, y_n) = y_1^n = (x_1 + \dots + x_r)^n.$$

Digamos ahora que la simetría g es una permutación cíclica del conjunto $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, n\}$. Es decir, $c_j(g) = 0$ si $j \neq n$, y $c_n(g) = 1$. En este caso tenemos que

$$I_{\Omega_g}(y_1, \dots, y_n) = y_n.$$

Ahora bien, Ω_g son las coloraciones de $\text{Col}_r(\mathcal{X})$ que quedan fijas por g ; así que son aquellas en las que todos los elementos de \mathcal{X} llevan el mismo color. La relación anterior nos dice que

$$I_{\Omega_g}(x_1, \dots, x_r) = x_1^n + \dots + x_r^n,$$

como ya observamos tras el lema 16.1.

16.2. La indicatriz de ciclos de un grupo de simetrías

Ya tenemos una función generatriz asociada a un conjunto general de coloraciones, su inventario. En general, interesará estudiar conjuntos de coloraciones no equivalentes por la acción de un cierto grupo de simetrías. En el capítulo 15 ya vimos cuán útil resultaba analizar cuántas simetrías tenían un cierto número de ciclos. Ahora va a ser necesario incorporar más información sobre la estructura de ciclos de cada simetría. Y para ello, de nuevo, ¡cómo no!, usaremos funciones generatrices.

Sea \mathcal{X} un conjunto con, digamos, n elementos (por ejemplo, el habitual $\mathcal{X} = \{1, \dots, n\}$), y sea G un grupo de simetrías de \mathcal{X} . Vamos a definir una función generatriz a la que se conoce con el rimbombante nombre de **función indicatriz de ciclos de un grupo de simetrías**, pero a la que llamaremos, más familiarmente y para abreviar, *indicatriz del grupo de simetrías*.

(versión preliminar 25 de diciembre de 2008)

Empezamos asociando a cada simetría g el siguiente monomio, que codifica la información relevante sobre sus ciclos:

$$y_1^{c_1(g)} y_2^{c_2(g)} \cdots y_n^{c_n(g)}$$

La **indicatriz de ciclos del grupo G** (o, simplemente, *indicatriz de G*) viene dada por

$$J_G(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} y_1^{c_1(g)} y_2^{c_2(g)} \cdots y_n^{c_n(g)}$$

Conviene hacer notar que, a diferencia del inventario I_Ω , la función indicatriz J_G *no* es homogénea (véase el ejercicio 16.2.1). Obsérvese que

$$J_G(1, 1, \dots, 1) = 1;$$

y, además, que

$$J_G(r, r, \dots, r) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{\sum_j c_j(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{\# \text{ciclos de } g} = \frac{1}{|G|} \sum_k \# \left\{ \begin{array}{l} \text{simetrías de } G \\ \text{con } k \text{ ciclos} \end{array} \right\} r^k,$$

que es la fórmula que utilizábamos en el capítulo 15 (véase la subsección 15.3.3) para contar el número de coloraciones con r colores no equivalentes por la acción de G . Así que

$$J_G(r, \dots, r) = \# \{ \text{coloraciones de } \text{Col}_r(\mathcal{X}) \text{ no equivalentes por la acción de } G \}$$

Veamos algunos ejemplos de indicatrices de grupos.

EJEMPLO 16.2.1 La indicatriz del grupo $\mathcal{I} = \{id\}$.

La identidad fija todos los elementos de \mathcal{X} , tiene n ciclos de longitud 1, así que

$$J_{\mathcal{I}}(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^n.$$

Por supuesto, el número de coloraciones no equivalentes por la acción de la identidad es $J_{\mathcal{I}}(r, r, \dots, r) = r^n$, es decir, todas las posibles. ♣

EJEMPLO 16.2.2 Las indicatrices de los grupos \mathcal{C}_n y \mathcal{D}_n , las rotaciones y las isometrías, respectivamente, del polígono regular de n lados.

Recordemos (de la subsección 15.4.1) que, para cada d que divide a n , hay $\phi(d)$ simetrías en G con n/d ciclos de longitud d . De manera que

$$J_{\mathcal{C}_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) y_d^{n/d}.$$

El análisis de \mathcal{D}_n es paralelo al anterior. Distinguimos, claro, los casos n par y n impar. Si recordamos el análisis de los ciclos de la subsección 15.4.2, no es difícil comprobar que

$$J_{\mathcal{D}_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{cases} \frac{1}{2} J_{\mathcal{C}_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) + \frac{1}{4} [y_2^{n/2} + y_1^2 y_2^{n/2-1}] & \text{si } n \text{ par;} \\ \frac{1}{2} J_{\mathcal{C}_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) + \frac{1}{2} [y_1 y_2^{(n-1)/2}] & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases}$$

Tomando en estas expresiones $y_1 = \cdots = y_n = r$, recuperamos las fórmulas sobre el número de coloraciones no equivalentes por \mathcal{C}_n y \mathcal{D}_n de las subsecciones 15.4.1 y 15.4.2. ♣

(versión preliminar 25 de diciembre de 2008)

EJEMPLO 16.2.3 *El grupo G de rotaciones del cubo.*

Con la descripción de la estructura de ciclos de las 24 rotaciones (que se detalló en la subsección 15.5.1), obtenemos que

$$J_G(y_1, y_2, \dots, y_8) = \frac{1}{24} [y_1^8 + 8 y_1^2 y_3^2 + 9 y_2^4 + 6 y_4^2],$$

para recuperar, tomando $y_1 = \dots = y_8 = r$, la conocida fórmula para el número de coloraciones (con r colores) de los vértices del cubo no equivalentes por rotaciones: $J_G(r, \dots, r) = \frac{1}{24} (r^8 + 17 r^4 + 6 r^2)$ (véase también el ejercicio 16.2.6). ♣

EJEMPLO 16.2.4 *La indicatriz del grupo simétrico completo S_n .*

Queremos la expresión de $J_{S_n}(y_1, \dots, y_n)$. Cada simetría $g \in S_n$ tendrá un cierto número de ciclos, $c_1(g)$ de longitud 1, $c_2(g)$ de longitud 2, etc. Si dos simetrías tienen sus ciclos de igual longitud, contribuirán al mismo término de la indicatriz de los ciclos.

Así que bastará saber, para cada elección de enteros no negativos b_1, \dots, b_n tales que $\sum_{j=1}^n j b_j = n$, cuántas permutaciones de S_n tienen b_1 ciclos de longitud 1, b_2 de longitud 2, etc. (éste será el coeficiente del término $y_1^{b_1} \dots y_n^{b_n}$). Como ya vimos en la subsección 3.2.1, este número es

$$\frac{n!}{1^{b_1} 2^{b_2} \dots n^{b_n} b_1! b_2! \dots b_n!}.$$

Así que la indicatriz de ciclos del grupo simétrico se expresa de la siguiente manera:

$$J_{S_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{\sum_j j b_j = n} \frac{1}{b_1! b_2! \dots b_n! 1^{b_1} 2^{b_2} \dots n^{b_n}} y_1^{b_1} y_2^{b_2} \dots y_n^{b_n}.$$

Recordemos que el número de sumandos (elecciones distintas de los b_j) coincide con $p(n)$, el número de particiones de n . Recogemos a continuación los casos $n = 2, 3, 4$ de la expresión anterior, pues los usaremos más adelante en varias ocasiones:

$$\begin{aligned} J_{S_2}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2), \\ J_{S_3}(y_1, y_2, y_3) &= \frac{1}{6}(y_1^3 + 3y_1 y_2 + 2y_3), \\ J_{S_4}(y_1, y_2, y_3, y_4) &= \frac{1}{24}(y_1^4 + 6y_2 y_1^2 + 3y_2^2 + 8y_3 y_1 + 6y_4) \end{aligned}$$

Instamos al lector diligente a que obtenga estas indicatrices: a) aplicando la fórmula general; y b) clasificando los elementos del correspondientes S_n por su descomposición en ciclos. ♣

A la vista de la expresión tan alambicada de estas indicatrices de los grupos simétricos, el lector se sorprenderá, quizás, al descubrir que se pueden expresar *todas juntas* de la manera tan compacta y elegante que sigue:

Lema 16.3 *La función generatriz de las indicatrices de ciclos de los grupos simétricos es:*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[J_{S_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) \right] z^n = \exp \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{y_j}{j} \right] z^j \right)$$

(versión preliminar 25 de diciembre de 2008)

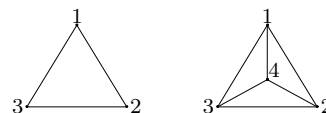
Si decidimos, como resulta conveniente, que J_{S_0} (sin variables) vale 1, entonces cada función generatriz $J_{S_n}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ aparece como coeficiente n -ésimo de la serie de potencias $\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} y_j/j \cdot z^j\right)$. Nótese que en esta función generatriz hay infinitas variables y_j . Dejamos la demostración de este lema como ejercicio 16.2.3 para el lector.

Por cierto, parodiando a Pólya, podemos decir que la indicatriz de ciclos de G sabe mucho del grupo G , pero, ¡ay!, no lo sabe todo, pues hay grupos *no* isomorfos que tienen las mismas indicatrices⁵.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 16.2

16.2.1 Compruébese que la función $(y_1, y_2, \dots, y_n) \mapsto J_G(y_1^1, y_2^2, \dots, y_n^n)$ es homogénea.

16.2.2 Calcúlese la indicatriz del grupo cíclico C_3 al actuar sobre los conjuntos $\{1, 2, 3\}$ y $\{1, 2, 3, 4\}$, que son los vértices de las dos figuras que dibujamos a la derecha.



16.2.3 Compruébese que

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[J_{S_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) \right] z^n = \exp \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{y_j}{j} \right] z^j \right).$$

¿Qué ocurre si tomamos $y_j = r$ para cada j ?

16.2.4 Calcúlese la indicatriz del grupo A_n , el grupo alternado.

16.2.5 Calcúlese la indicatriz del grupo G de rotaciones que preservan la pulsera del ejercicio 15.5.4.

16.2.6 Compruébese que la indicatriz de ciclos del grupo de rotaciones del cubo actuando sobre las aristas es

$$\frac{1}{24}(y_1^{12} + 3y_2^6 + 6y_4^3 + 6y_1^2y_2^5 + 8y_3^4),$$

y sobre las caras

$$\frac{1}{24}(y_1^6 + 3y_1^2y_2^2 + 6y_1^2y_4 + 6y_2^3 + 8y_3^2).$$

16.2.7 Sean G_1 y G_2 grupos de simetría respectivos de dos conjuntos disjuntos \mathcal{X}_1 y \mathcal{X}_2 . Sea ahora la unión $\mathcal{Z} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$, y sea K el grupo producto $G_1 \times G_2$. Consideramos los elementos de K , actuando sobre \mathcal{Z} mediante:

$$(g_1, g_2)(z) = \begin{cases} g_1(z), & \text{si } z \in \mathcal{X}_1 \\ g_2(z), & \text{si } z \in \mathcal{X}_2 \end{cases}$$

Obsérvese que se trata de una acción fiel, es decir, K es un grupo de simetrías de \mathcal{Z} . Compruébese que

$$J_H(y_1, y_2, \dots) = J_{G_1}(y_1, y_2, \dots) \cdot J_{G_2}(y_1, y_2, \dots)$$

⁵Por ejemplo, si p es primo y $m \geq 3$, se sabe que hay un grupo no conmutativo de orden p^m donde todos los elementos son de orden p . Claro, también podemos formar el grupo conmutativo $\mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p$ (hay p^{m-1} copias de \mathbb{Z}_p). Los grupos no son isomorfos, pero la indicatriz, en ambos casos, será $y_1^{p^m} + (p^m - 1)y_p^{p^{m-1}}$.

16.3. El teorema de Pólya de coloraciones

Tenemos un conjunto \mathcal{X} con n elementos y r colores. El grupo de simetrías G actúa sobre \mathcal{X} , y también sobre el conjunto $\mathcal{Y} = \text{Col}_r(\mathcal{X})$ de las coloraciones con esos r colores. Tomamos ahora una y solo una coloración en cada órbita de la acción de G sobre \mathcal{Y} para formar un conjunto Ω de coloraciones no equivalentes (por G). El siguiente elegante teorema nos permite obtener el inventario de estas coloraciones a partir de la indicatriz de ciclos de G .

Teorema 16.4 (Pólya para coloraciones) *El inventario del conjunto Ω de coloraciones no equivalentes por la acción de G viene dado por*

$$I_{\Omega}(x_1, x_2, \dots, x_r) = J_G(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

donde

$$y_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_r^k \quad \text{para cada } k = 1, 2, \dots, n.$$

El lema cuenta-órbitas de Burnside (véase la versión de la página 1062) es corolario directo de este teorema, pues basta sustituir cada x_j por 1 (y así todas las y_k son iguales a r) para obtener

$$\underbrace{I_{\Omega}(1, 1, \dots, 1)}_{=|\Omega|} = J_G(r, r, \dots, r) = \frac{1}{|G|} \sum_k \# \left\{ \begin{array}{c} \text{simetrías de } G \\ \text{con } k \text{ ciclos} \end{array} \right\} r^k.$$

Aunque, en virtuoso círculo, y como veremos más adelante, en la subsección 16.3.1, la demostración del teorema 16.4 se deducirá de la versión ponderada del lema de Burnside.

Antes de entrar en la demostración, vamos a comprobar la potencia de este resultado en unos cuantos ejemplos. Varios de ellos ya se trataron en el capítulo 15, y aquí veremos cómo el teorema de Pólya nos permite obtener información mucho más detallada de la que allí conseguíamos, pues no sólo seremos capaces de calcular cuántas coloraciones no equivalentes hay (que eso ya lo hacíamos con el lema de Burnside), sino que sabremos cuántas hay con cada combinación de colores. Toda esta información estará contenida en los coeficientes de la función de inventario. El teorema de Pólya nos proporciona una manera directa y mecánica de calcular este inventario a partir del análisis de los ciclos de G , pues una vez que dispongamos de $J_G(y_1, \dots, y_n)$, bastará sustituir cada y_j por la combinación de $x_1^j + \dots + x_r^j$ correspondiente para obtener I_{Ω} .

EJEMPLO 16.3.1 *Collares con 14 cuentas, blancas y azules.*

Como siempre, al hablar de collares suponemos que consideramos como iguales a los que se obtienen unos de otros por rotaciones (pero, por ahora, no por volteo). El análisis que hicimos de la subsección 15.4.1 nos permite obtener el número de collares con 14 cuentas:

$$\begin{aligned} \# \{ \text{Coloraciones en } \text{Col}_2(\{0, 1, \dots, 13\}) \text{ no equivalentes por } \mathcal{C}_{14} \} &= \frac{1}{14} \sum_{d|14} \phi(d) 2^{\frac{14}{d}} \\ &= \frac{1}{14} (\phi(1) 2^{14} + \phi(2) 2^7 + \phi(7) 2^2 + \phi(14) 2^1) = \frac{1}{14} (2^{14} + 2^7 + 6 \times 2^2 + 6 \times 2^1) = 1182. \end{aligned}$$

(versión preliminar 25 de diciembre de 2008)

Pero, ¿y si nos preguntamos, por ejemplo, cuántos collares hay con tres cuentas blancas y once azules? Argumentemos “a la Burnside”. El conjunto \mathcal{X} tiene 14 elementos, y el grupo de simetrías es un \mathcal{C}_{14} . Ahora seleccionamos, como \mathcal{Y} , las $\binom{14}{3}$ coloraciones de \mathcal{X} con 3 blancas y 11 azules. Para determinar el número de elementos de \mathcal{Y} no equivalentes por \mathcal{C}_{14} , vía el lema de Burnside, hemos de calcular el número de puntos fijos de cada una de las simetrías. La identidad fija todos los elementos de \mathcal{Y} . Y el resto de las simetrías (son rotaciones) no fija coloración alguna. Así que

$$\# \{ \text{coloraciones en } \mathcal{Y} \text{ no equivalentes por } G \} = \frac{1}{14} \binom{14}{3} = 26.$$

Un argumento bastante *ad hoc*, que habría que rehacer si, por ejemplo, nos pidieran el número de collares con 5 cuentas blancas, o con a lo sumo 7 cuentas blancas, o...

Apliquemos el teorema de Pólya, que nos dice que

$$I_{\Omega}(x_1, x_2) = J_{\mathcal{C}_{14}}(y_1, y_2, \dots, y_{14}).$$

Como ya vimos en el ejemplo 16.2.2,

$$J_{\mathcal{C}_{14}}(y_1, y_2, \dots, y_{14}) = \frac{1}{14} \sum_{d|14} \phi(d) y_d^{14/d} = \frac{1}{14} (y_1^{14} + y_2^7 + 6y_7^2 + 6y_{14}).$$

Ahora sustituimos las y_k por sus respectivas expresiones en términos de las x_j :

$$I_{\Omega}(x_1, x_2) = \frac{1}{14} \left((x_1 + x_2)^{14} + (x_1^2 + x_2^2)^7 + 6(x_1^7 + x_2^7)^2 + 6(x_1^{14} + x_2^{14}) \right).$$

Si desarrollamos esta expresión, obtenemos (¡caramba!):

$$\begin{aligned} I_{\Omega}(x_1, x_2) = & x_1^{14} + x_1^{13}x_2 + 7x_1^{12}x_2^2 + 26x_1^{11}x_2^3 + 73x_1^{10}x_2^4 + 143x_1^9x_2^5 + 217x_1^8x_2^6 + 246x_1^7x_2^7 \\ & + 217x_1^6x_2^8 + 143x_1^5x_2^9 + 73x_1^4x_2^{10} + 26x_1^3x_2^{11} + 7x_1^2x_2^{12} + x_1x_2^{13} + x_2^{14}. \end{aligned}$$

¡Y aquí está todo! Por ejemplo, para obtener el número total de collares con 14 cuentas, basta tomar $x_1 = x_2 = 1$:

$$I_{\Omega}(1, 1) = 1 + 7 + 1 + 1 + 26 + 73 + 143 + 217 + 246 + 217 + 143 + 73 + 26 + 7 + 1 = 1182.$$

Con 3 cuentas blancas (y 11 azules) hay 26 collares (mírese el coeficiente de $x_1^3x_2^{11}$). Con 5 cuentas blancas hay 143 (el coeficiente de $x_1^5x_2^9$). Con a lo sumo 7 cuentas blancas hay

$$246 + 217 + 143 + 73 + 26 + 7 + 1 + 1 = 714$$

(la suma de los coeficientes de los términos en los que x_1 aparece con grado ≤ 7). Etc.

Pero más aún: si dispusiéramos de *tres* colores, basta cambiar el tipo de sustitución (ahora cada y_j se reemplaza por $x_1^j + x_2^j + x_3^j$) para obtener

$$I_{\Omega}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{14} \left((x_1 + x_2 + x_3)^{14} + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^7 + 6(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7)^2 + 6(x_1^{14} + x_2^{14} + x_3^{14}) \right).$$

Desarrollando esta expresión, tendríamos todas las respuestas codificadas en los coeficientes.

(versión preliminar 25 de diciembre de 2008)

Si además cambiamos ahora de grupo de simetrías, y consideramos el grupo diédrico (esto es, incluimos el volteo como una de las operaciones de identificación permitidas), el análisis con Pólya requiere la indicatriz de \mathcal{D}_{14} (véase el ejemplo 16.2.2):

$$J_{\mathcal{D}_{14}}(y_1, \dots, y_{14}) = \frac{1}{28} (y_1^{14} + 8y_2^7 + 6y_7^2 + 6y_{14} + 7y_1^2 y_2^6) .$$

Si Ω es el conjunto de coloraciones (con 2 colores) no equivalentes por \mathcal{D}_{14} , su inventario es

$$I_{\Omega}(x_1, x_2) = I_{\mathcal{D}_{14}}(x_1 + x_2, \dots, x_1^{14} + x_2^{14}),$$

cuyo desarrollo en serie nos da las respuestas buscadas. ♣

EJEMPLO 16.3.2 *Volvamos al ejemplo de las tarjetas con 16 casillas del ejemplo 15.3.7.*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Nuestra tarjeta tiene 16 casillas, que marcamos o no; tenemos, pues, dos colores. El grupo de simetrías que consideramos es $G = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, las cuatro rotaciones de la figura. Como vimos en el citado ejemplo, hay 16456 tarjetas no equivalentes por rotaciones (y 10763361 si podemos marcar las casillas con tres símbolos). Abordemos la cuestión con el teorema de Pólya.

Recordemos la descomposición en ciclos de las simetrías: σ_0 constaba de 16 ciclos de longitud 1, σ_1 de 4 ciclos de longitud 4 (igual que σ_3), mientras que σ_2 tenía 8 ciclos de longitud 2. Con esto podemos escribir la indicatriz de ciclos del G :

$$J_G(y_1, \dots, y_{16}) = \frac{1}{4} [y_1^{16} + 2y_4^4 + y_2^8] .$$

Si disponemos de dos colores, el inventario de las coloraciones Ω no equivalentes por G es

$$\begin{aligned} I_{\Omega}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4} [(x_1 + x_2)^{16} + 2(x_1^4 + x_2^4)^4 + (x_1^2 + x_2^2)^8] \\ &= x_1^{16} + 4x_1^{15}x_2 + 32x_1^{14}x_2^2 + 140x_1^{13}x_2^3 + 464x_1^{12}x_2^4 + 1092x_1^{11}x_2^5 + 2016x_1^{10}x_2^6 \\ &\quad + 2860x_1^9x_2^7 + 3238x_1^8x_2^8 + 2860x_1^7x_2^9 + 2016x_1^6x_2^{10} + 1092x_1^5x_2^{11} + 464x_1^4x_2^{12} \\ &\quad + 140x_1^3x_2^{13} + 32x_1^2x_2^{14} + 4x_1x_2^{15} + x_2^{16} \end{aligned}$$

(¡cáspita!). El número total de coloraciones no equivalentes se obtiene tomando $x_1 = x_2 = 1$:

$$I_{\Omega}(1, 1) = |\Omega| = \frac{1}{4} [2^{16} + 2 \times 2^4 + 2^8] = 16456 ,$$

como ya sabíamos. Pero más aún: con tres casillas marcadas hay 32 tarjetas, con cuatro hay 140, con 6 o 7 casillas marcadas hay $2016 + 2860 = 4876$, etc. Si tuviéramos tres símbolos a nuestra disposición para marcar las casillas, el inventario sería

$$I_{\Omega}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4} [(x_1 + x_2 + x_3)^{16} + 2(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)^4 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^8] ,$$

de manera que el número total de tarjetas con estas características sería el ya conocido $I_{\Omega}(1, 1, 1) = \frac{1}{4} [3^{16} + 2 \times 3^4 + 3^8] = 10763361$. Dejamos que el lector se entretenga, si le place, desarrollando la expresión de este inventario para tener codificadas todas las respuestas posibles. ♣

(versión preliminar 25 de diciembre de 2008)

Admire el lector cuán directo y flexible es el método: una vez que tenemos la indicatriz de ciclos del grupo en cuestión, una simple sustitución (y un quizás engorroso, pero muy mecánico, desarrollo de la expresión resultante) nos ofrece inmediatamente la función de inventario. Quizás algún lector laborioso estará pidiendo alguna indicación sobre cómo se han desarrollado en serie las aparatosas expresiones que aparecían en los dos ejemplos anteriores. Pues sentimos la decepción, porque no las habrá, pues esos cálculos se han hecho recurriendo a algún paquete matemático de cálculo (tipo Maple), para el que un tal desarrollo no es más que una tarea rutinaria, de esas que el software puede hacer 100 sin ni siquiera desayunar. Es posible que ese lector, a quien sin duda adorna un cierto toque romántico, eche de menos, nostálgico él, algún ingenioso argumento “matemático”, quizás vía el teorema del binomio o del trinomio, que permita obtener los coeficientes de interés en cada caso. No seremos nosotros quienes coartemos tal impulso, ¡ánimo con ello! Aunque viene a cuento recordar la frase de Whitehead, a la que ya aludíamos en la página 10, en el sentido de “la civilización avanza ampliando el número de operaciones importantes que podemos realizar sin pensar en ellas”. Sea a puro pulso matemático, sea con ayuda de algún software matemático, le animamos a que se entrene en el uso de este procedimiento con los ejercicios de esta sección.

Finalizamos esta subsección con un par de ejemplos, algo más elaborados, pero que abren nuevas perspectivas del uso de la técnica de Pólya. La demostración del teorema 16.4 se abordará en la subsección 16.3.1. Reservamos el final de esta sección (subsección 16.3.2) para la aplicación de esta técnica a una cuestión especialmente interesante, como es el cálculo del número de grafos no isomorfos con n vértices.

EJEMPLO 16.3.3 Coloraciones con dos colores y subconjuntos. *Colorear un conjunto X con dos colores, que en este ejemplo serán 0 y 1, es lo mismo que seleccionar un subconjunto, donde el 1 significa “estar” en el subconjunto y el 0 “no estar”. Tenemos además un grupo G . Dos subconjuntos A y B son equivalentes por G si hay una simetría g de G tal que $B = \{g(a) : a \in A\}$; es decir que las coloraciones son equivalentes.*

Nos interesa el número de conjuntos no equivalentes de tamaño k , denotémoslo por α_k . Hay dos casos extremos naturales: si $G = \{id\}$, entonces $\alpha_k = \binom{n}{k}$, mientras que si $G = S_n$, entonces dos conjuntos con el mismo número de elementos son siempre equivalentes, y $\alpha_k = 1$.

El inventario $I(x_1, x_2)$ de subconjuntos no equivalentes viene dado por

$$I(x_1, x_2) = J_G(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Si x_1 está asociado al color 1 y x_2 al color 0, el coeficiente de $x_1^k x_2^{n-k}$ en la expresión de $I(x_1, x_2)$ nos da el número α_k . O más directamente, si ponemos $x_1 = x$, $x_2 = 1$, vemos que

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k x^k = I(x, 1) \quad \text{es decir,} \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k = J_G(1 + x, 1 + x^2, \dots, 1 + x^n).$$

pues, en este caso, $y_j = x^j + 1$, para $j = 1, 2, \dots, n$.

En el caso de $G = \{id\}$, como $J_G(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^n$, tenemos que

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k x^k = (1 + x)^n, \quad \text{de donde, como ya sabíamos,} \quad \alpha_k = \binom{n}{k}.$$

(versión preliminar 25 de diciembre de 2008)

La expresión de la indicatriz del grupo simétricos es más complicada, así que, ¿cómo podemos obtener que $\alpha_k = 1$? Hasta ahora n estaba fijo. Corrijamos la notación: donde decíamos α_k pongamos α_k^n , para indicar su dependencia en n . Y es que vamos a comprobar que $\alpha_k^n = 1$, para $0 \leq k \leq n$ y $n = 1, 2, \dots$ de golpe, todos a la vez. Esto de “calcular de golpe” es pura invocación a la magia de las funciones generatrices. Partimos de la mística identidad del lema 16.3:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} [J_{S_n}(y_1, y_2, \dots, y_n)] z^n = \exp \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{y_j}{j} \right] z^j \right).$$

Tenemos que

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k^n x^k = J_{S_n}(1+x, 1+x^2, \dots, 1+x^n),$$

y substituyendo:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k^n x^k \right) z^n = \exp \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1+x^j}{j} \right] z^j \right) = \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-xz}$$

donde hemos usado la identidad $\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{u^j}{j} \right) = \ln \frac{1}{1-u}$, que se comprueba directamente derivando. Pero

$$\frac{1}{1-z} \frac{1}{1-xz} = (1+z+z^2+z^3+\dots)(1+xz+x^2z^2+x^3z^3+\dots) = 1+z(1+x)+z^2(1+x+x^2)+\dots$$

Igualando coeficientes deducimos que $\alpha_k^n = 1$, para $0 \leq k \leq n$, y $n \geq 1$, como ya sabíamos. Al lector puede interesarle ahora el ejercicio 16.3.5. ♣

El siguiente ejemplo es un guiño anticipando al teorema de Pólya de decoraciones.

EJEMPLO 16.3.4 Matrices. *Tenemos tan sólo 5 colores, pero los tres primeros resultan ser matrices de un mismo color, digamos, rojo, y los dos segundos, matrices de azul.*

El inventario de coloraciones no equivalentes es:

$$I_{\Omega}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = J_G(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Nos interesa conocer cuántas de las coloraciones anteriores tienen una cantidad dada de posiciones rojas y azules⁶. Nada más fácil: introduzcamos dos variables, u_1 , para el rojo, y u_2 , para el azul. Pues bien, el coeficiente de $u_1^k u_2^j$ de

$$I_{\Omega}(u_1, u_1, u_1, u_2, u_2)$$

es el número de coloraciones no equivalentes con k rojos y j azules. Bien, ¿pero cómo se traduce en términos de la indicatriz del grupo? Basta con expresar las variables y_j en términos de las u_j ; de manera que el inventario $H(u_1, u_2)$ de coloraciones no equivalentes que atiende sólo a contar rojos y azules es:

$$H(u_1, u_2) = I_G(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

donde $y_j = x_1^j + x_2^j + x_3^j + x_4^j + x_5^j = 3u_1^j + 2u_2^j$ ♣

⁶Radicales que estamos: quedan abolidos los matrices.

16.3.1. Demostración del teorema de Pólya de coloraciones

La demostración, como vamos a comprobar enseguida, es consecuencia directa de la versión ponderada del lema de Burnside para coloraciones (véase el lema 15.9). El inventario de un conjunto Ω de coloraciones no equivalentes se escribe como

$$I_{\Omega}(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{\omega \in \Omega} x_1^{n_1(\omega)} x_2^{n_2(\omega)} \dots x_r^{n_r(\omega)}$$

donde $n_j(\omega)$ es el número de veces que aparece cada color j en la coloración ω . Consideramos el grupo G actuando sobre el conjunto \mathcal{Y} de coloraciones con r colores de \mathcal{X} . Definimos una función peso p que, a cada coloración ω de \mathcal{Y} , le asocia el monomio

$$\omega \rightarrow p(\omega) = x_1^{n_1(\omega)} x_2^{n_2(\omega)} \dots x_r^{n_r(\omega)}.$$

de manera que

$$I_{\Omega}(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{\omega} p(\omega).$$

Obsérvese que, dada una simetría $g \in G$, $n_j(g(\omega)) = n_j(\omega)$, para cada $j = 1, 2, \dots, r$, porque la simetría variará la coloración, pero no cambia el número de elementos que llevan un mismo color. Por tanto,

$$p(g(\omega)) = p(\omega),$$

esto es, el peso p es constante en las órbitas de G (en su acción sobre \mathcal{Y}), que es justamente el ingrediente necesario para poder aplicar el lema de Burnside con pesos. Teniendo en cuenta que Ω es un conjunto de representantes de las órbitas de G en \mathcal{Y} , obtenemos

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_{\omega \in F(g)} p(\omega) \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} I_{\Omega_g}.$$

Pero, tal y como dicta el lema 16.2,

$$I_{\Omega_g}(x_1, x_2, \dots, x_r) = y_1^{c_1(g)} y_2^{c_2(g)} \dots y_n^{c_n(g)},$$

donde las y_k se relacionan con las x_j de la manera habitual. Así podemos concluir que

$$I_{\Omega}(x_1, x_2, \dots, x_r) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} y_1^{c_1(g)} y_2^{c_2(g)} \dots y_n^{c_n(g)} = I_G(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

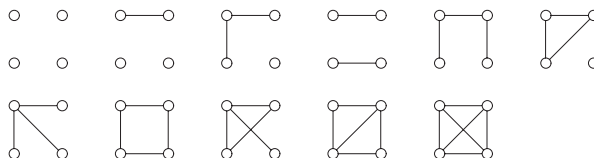
como reza el teorema de Pólya. ■

16.3.2. Enumeración de grafos no isomorfos

Esto de enumerar grafos no isomorfos es asunto delicado. En la subsección 8.1.2, en aquella disquisición de tintes escolásticos sobre las almas y los cuerpos de los grafos que quizás recuerde el lector (o si no, es buen momento para repasarla), apenas nos asomamos a la cuestión, analizando casos sencillos, como el de los grafos con 4 vértices y 3 aristas. Procedíamos allí con cautela, intentando ser ordenados, guiándonos por las posibles sucesiones de grados... pero siempre con una cierta desconfianza, reconózcalo el lector: ¡ay!, ¿nos estaremos olvidando alguna configuración?

(versión preliminar 25 de diciembre de 2008)

Hay, por ejemplo, 4 grafos no isomorfos con tres vértices (uno sin aristas, uno con 1 arista, uno con 2 y uno con 3), mientras que existen 11 grafos no isomorfos con 4 vértices, de los cuales hay 1 sin aristas, 1 con una arista, 2 con dos, 3 con tres, 2 con cuatro, 1 con cinco y 1 con 6:



Y habría hasta 34 grafos no isomorfos con 5 vértices, 156 con 6, 1044 con 7, etc. Pero, ¿cómo podemos obtener estos números? La teoría de Pólya llega en nuestra ayuda. Como en un momento descubrirá el lector, tras una cierta elaboración previa (un tanto sofisticada), seremos capaces de obtener una función generatriz con la que no sólo podremos determinar el número de grafos isomorfos (con n vértices) que hay, sino también cuántos hay con cada posible número de aristas. Una información de lo más detallada, y que se obtendrá con un procedimiento bastante mecánico. Una maravilla.

Fijemos un conjunto de vértices, digamos $V = \{1, \dots, n\}$. Para completar el grafo, necesitamos prescribir el conjunto A de aristas, es decir, seleccionar, de entre todas las parejas de vértices, unas cuantas de ellas. En términos que ya nos son familiares en este capítulo, completar el grafo es lo mismo que colorear el conjunto de los $\binom{n}{2}$ pares de vértices con dos colores: por ejemplo, *estar* (si es que decidimos que el par en cuestión sea una arista del grafo) y *no estar* (en caso contrario).

Fijado V , dos grafos serán isomorfos si podemos llevar la coloración que define las aristas de uno a la coloración del otro mediante una cierta permutación de los vértices. De manera que dos grafos serán no isomorfos si sus coloraciones no son equivalentes por la acción de *todo el grupo simétrico* S_n . Este grupo simétrico actúa, en principio, sobre $\{1, \dots, n\}$, aunque lo que aquí interesa es analizar su acción sobre el conjunto de los pares de vértices (las posibles aristas). En particular, para poder usar el teorema de Pólya, necesitaremos conocer la indicatriz de los ciclos de S_n cuando actúa sobre los pares (porque la indicatriz de S_n al actuar sobre $\{1, \dots, n\}$ ya la conocemos, véase el ejemplo 16.2.4).

La acción a la que nos referimos es la siguiente: si g es una permutación de $\{1, \dots, n\}$ y $\{a, b\}$ es un cierto par (una arista), entonces $g(\{a, b\}) = \{g(a), g(b)\}$. Nos interesa saber en qué se traducen los ciclos de cada g (como permutación de $\{1, \dots, n\}$) al actuar sobre las aristas. Para hacernos una idea de la casuística, empezaremos analizando un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 16.3.5 *El caso $n = 5$.*

Digamos que $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. El grupo simétrico S_5 tiene $5! = 120$ elementos. Y hay $\binom{5}{2} = 10$ pares de vértices (candidatos a ser arista). Consideremos la permutación

$$g_1 = \circlearrowleft_5(12) \circ \circlearrowleft_5(34) \circ \circlearrowleft_5(5).$$

Sea ahora la arista $\{1, 3\}$, cuyos elementos pertenecen a ciclos distintos de g_1 , pero de la misma longitud. Sigamos su pista por la acción de g_1 :

$$\{1, 3\} \xrightarrow{g_1} \{g_1(1), g_1(3)\} = \{2, 4\} \xrightarrow{g_1} \{g_1(2), g_1(4)\} = \{1, 3\}.$$

(versión preliminar 25 de diciembre de 2008)

Se trata de un ciclo de longitud 2, la misma que tenían los ciclos a los que pertenecían los elementos de la arista. Digamos que la permutación es ahora

$$g_2 = \circlearrowleft_5(1\,2) \circ \circlearrowleft_5(3\,4\,5).$$

Consideramos de nuevo la arista $\{1, 3\}$, cuyos elementos están ahora en ciclos distintos y de longitudes diferentes. La primera acción de g_2 la lleva a $\{2, 4\}$, y la segunda a $\{1, 5\}$. El primer elemento del par ha vuelto al inicial, pero el segundo todavía no. En la tercera aplicación obtenemos $\{2, 3\}$; ahora es el segundo el que está en el estado inicial, pero el primero no. Un “desfase” que se resuelve a la sexta aplicación de g_2 . ¡Claro!, dirá el lector, porque $6 = 2 \times 3$; o, mejor, porque $6 = \text{mcm}(2, 3)$.

Miremos ahora la permutación

$$g_3 = \circlearrowleft_5(1\,2\,3) \circ \circlearrowleft_5(4\,5),$$

y volvamos a considerar la arista $\{1, 3\}$. Ahora los dos elementos pertenecen al mismo ciclo de la permutación, que además tiene longitud impar. Ocurre lo siguiente:

$$\{1, 3\} \xrightarrow{g_3} \{2, 1\} \xrightarrow{g_3} \{3, 2\} \xrightarrow{g_3} \{1, 3\}.$$

La longitud del ciclo es 3, la misma que la del ciclo al que pertenecían los miembros del par. Por último, sea la permutación

$$g_4 = \circlearrowleft_5(1\,2\,3\,4) \circ \circlearrowleft_5(5).$$

Empecemos con la arista $\{1, 2\}$. Sus elementos están en el mismo ciclo (ahora de orden par) de la permutación. Su trayectoria bajo g_4 es

$$\{1, 2\} \xrightarrow{g_4} \{2, 3\} \xrightarrow{g_4} \{3, 4\} \xrightarrow{g_4} \{4, 1\} \xrightarrow{g_4} \{1, 2\}.$$

La longitud del ciclo descrito por el par coincide con la del ciclo de sus componentes. Pero, ¡cuidado!, aunque éste es el comportamiento “general”, hay un caso especial que merece consideración aparte. Observemos qué ocurre con la arista $\{1, 3\}$:

$$\{1, 3\} \xrightarrow{g_4} \{2, 4\} \xrightarrow{g_4} \{3, 1\}.$$

Ahora el ciclo es de longitud 2, justamente la *mitad* de la longitud original. ¿Por qué ocurre esto? Porque los elementos del par “distan” en el ciclo original justo la mitad de la longitud total del mismo (4 en este caso). ♣

Este ejemplo, como vamos a ver en un momento, recoge ya toda la casuística posible. Pongámonos con el caso general. Partimos de un conjunto $\mathcal{X} = \{1, \dots, n\}$. El grupo simétrico S_n consta de $n!$ permutaciones. Queremos describir la acción de S_n sobre el conjunto \mathcal{Y} de los $\binom{n}{2}$ pares. Para distinguir, utilizaremos el símbolo $[S_n]^2$ para referirnos al grupo simétrico actuando así. Y, por comodidad, llamaremos $N = \binom{n}{2}$ en lo que sigue. Nuestro objetivo es escribir la indicatriz de ciclos de este grupo,

$$J_{[S_n]^2}(y_1, \dots, y_N) = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} y_1^{\tilde{c}_1(g)} \dots y_N^{\tilde{c}_N(g)}$$

(versión preliminar 25 de diciembre de 2008)

Aquí, y por distinguir de la acción sobre \mathcal{X} , $\tilde{c}_j(g)$ significa el número de ciclos de longitud j que tiene g en su acción sobre los pares. Tenemos $N = \binom{n}{2}$ variables, pues en principio podría haber ciclos de hasta esa longitud.

Sea entonces una permutación g del grupo simétrico S_n actuando sobre los pares $\{u, v\}$, que tendrá $c_j(g)$ ciclos de longitud j (en su acción sobre \mathcal{X}). Vamos a distinguir cuatro casos:

Caso 1.- La arista $\{u, v\}$ es tal que u y v pertenecen a ciclos distintos de g , que además tienen longitudes distintas, digamos $1 \leq l_1 < l_2 \leq n$:

$$\circlearrowleft_n(u a_2 \dots a_{l_1}) \quad \circlearrowleft_n(v b_2 \dots b_{l_2}).$$

En este caso,

$$\{u, v\} \xrightarrow{g} \{a_2, b_2\} \xrightarrow{g} \dots \xrightarrow{g} \{a_{l_1}, b_{l_1}\} \xrightarrow{g} \dots \xrightarrow{g} \{a_{l_2}, b_{l_2}\} \xrightarrow{g} \dots \xrightarrow{g} \{u, v\}$$

La longitud de este ciclo, la primera vez que ambos elementos vuelven a su posición original, será $\text{mcm}(l_1, l_2)$. De forma que cada ciclo (de aristas) de éstos aportará a la indicatriz de ciclos un término del tipo $y_{\text{mcm}(l_1, l_2)}$. Ahora bien, ¿cuántos ciclos de éstos hay? Digamos que l_1 y l_2 están fijos (con $1 \leq l_1 < l_2 \leq n$). Decidimos primero qué dos ciclos de longitudes l_1 y l_2 de g estamos considerando: hay $c_{l_1}(g) c_{l_2}(g)$ posibles elecciones. Una vez fijados los dos ciclos de g , tendremos que contar cuántos ciclos (de pares) aparecen. En principio hay $l_1 l_2$ maneras (las elecciones posibles de u en un ciclo y de v en el otro). Pero claro, para no repetir, habrá que dividir por la longitud común del ciclo de los pares, que es $\text{mcm}(l_1, l_2)$. Es decir, habrá en total

$$\frac{l_1 l_2}{\text{mcm}(l_1, l_2)} = \text{mcd}(l_1, l_2).$$

Y la aportación de este caso a la indicatriz de los ciclos será

$$\prod_{1 \leq l_1 < l_2 \leq n} y_{\text{mcm}(l_1, l_2)}^{c_{l_1}(g) c_{l_2}(g) \text{mcd}(l_1, l_2)}.$$

Caso 2.- u y v pertenecen a dos ciclos distintos de g , ambos de longitud l ,

$$\circlearrowleft_n(u a_2 \dots a_l) \quad \circlearrowleft_n(v b_2 \dots b_l).$$

Este caso es más sencillo, pues

$$\{u, v\} \xrightarrow{g} \{a_2, b_2\} \xrightarrow{g} \dots \xrightarrow{g} \{a_l, b_l\} \xrightarrow{g} \{u, v\}$$

y el ciclo tiene longitud l , la misma que los ciclos originales. Así que contribuirá con un factor y_l a la indicatriz. Una vez fijado l , para contar el número de ciclos (de pares) que hay

- decidimos los ciclos de longitud l de g en los que estamos (hay $\binom{c_l(g)}{2}$ posibilidades);
- y para esos ciclos particulares de g , hay $l^2/l = l$ ciclos de aristas (los l^2 posibles pares se distribuyen en los ciclos longitud l).

En total, obtenemos una contribución

$$\prod_{1 \leq l \leq n} y_l^{l \binom{c_l(g)}{2}}.$$

(versión preliminar 25 de diciembre de 2008)

Caso 3.- u y v están en un mismo ciclo de longitud l impar, $\odot_n(u \dots v \dots a_l)$. Independientemente de las posiciones relativas de u y v en el ciclo, la arista $\{u, v\}$ describe un ciclo de longitud l bajo la acción de g ; por tanto, habrá una contribución y_l . Fijado l (impar), el número de ciclos de este tipo será

$$c_l(g) \binom{l}{2} \frac{1}{l} = c_l(g) \frac{l-1}{2},$$

como corresponde a decidir en qué ciclo estamos, escoger los dos elementos y dividir por la longitud de los ciclos de aristas. En total,

$$\prod_{l \text{ impar}} y_l^{c_l(g) \frac{l-1}{2}}.$$

Caso 4.- El último caso, en el que u y v están en un ciclo de g de longitud l par, requiere algo más de elaboración. Distinguimos dos posibilidades:

- si están distanciados *exactamente* $l/2$, digamos que $\odot_n(u a_1 \dots v a_{l/2+1} \dots a_l)$, entonces el ciclo de la arista es de longitud $l/2$; el número de estos ciclos es $(l/2)/(l/2) = 1$, porque recorre todos los pares que están distanciados de esta manera.
- Si u y v no están situados de esa manera, entonces el ciclo de la arista $\{u, v\}$ es de longitud l . Elegir un par de elementos que no estén a distancia $l/2$ en el ciclo se puede hacer de $l(l-2)/2$ formas, porque una vez elegido el primero, tenemos una posición extra prohibida.

En total, la contribución de este caso resulta ser

$$\prod_{l \text{ par}} y_l^{\frac{l-2}{2} c_l(g)} y_{l/2}^{c_l(g)}.$$

Tras todo este análisis, estamos en disposición de escribir una primera versión de la indicatriz de ciclos de $[S_n]^2$:

$$\begin{aligned} J_{[S_n]^2}(y_1, \dots, y_N) &= \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \left(\prod_{1 \leq l_1 < l_2 \leq n} y_{\text{mcm}(l_1, l_2)}^{c_{l_1}(g) c_{l_2}(g)} \times \prod_{1 \leq l \leq n} y_l^{l \binom{c_l(g)}{2}} \times \prod_{l \text{ impar}} y_l^{c_l(g) \frac{l-1}{2}} \times \prod_{l \text{ par}} \left[y_l^{\frac{l-2}{2} c_l(g)} y_{l/2}^{c_l(g)} \right] \right). \end{aligned}$$

Observe el lector que, en la suma anterior, de cada g sólo interviene su estructura de ciclos, los valores $(c_1(g), \dots, c_n(g))$. Así que, recordando del ejemplo 16.2.4 cuántas permutaciones con una estructura de ciclos determinada hay, concluimos que

$$\begin{aligned} J_{[S_n]^2}(y_1, \dots, y_N) &= \sum_{\substack{b_1, \dots, b_n \geq 0 \\ \sum j b_j = n}} \left(\frac{1}{b_1! b_2! \dots b_n! 1^{b_1} 2^{b_2} \dots n^{b_n}} \times \right. \\ &\quad \times \prod_{1 \leq l_1 < l_2 \leq n} y_{\text{mcm}(l_1, l_2)}^{b_{l_1} b_{l_2}} \times \prod_{1 \leq l \leq n} y_l^{l \binom{b_l}{2}} \times \prod_{l \text{ impar}} y_l^{b_l \frac{l-1}{2}} \times \left. \prod_{l \text{ par}} \left[y_l^{\frac{l-2}{2} b_l} y_{l/2}^{b_l} \right] \right) \end{aligned}$$

(versión preliminar 25 de diciembre de 2008)

La expresión, reconozcámoslo, amedrenta⁷. Para n fijo, primero tendremos que determinar todas las combinaciones b_1, \dots, b_n de cada sumando (recordemos que hay $p(n)$ posibles combinaciones, las particiones del entero n). Después “sólo” hay que ir escribiendo explícitamente cada uno de los términos mediante las fórmulas correspondientes.

Una vez que conocemos $J_{[S_n]^2}$, para contar los grafos en n vértices no isomorfos, aplicamos el teorema de Pólya: se trata de colorear los 2-subconjuntos con dos colores, y obtenemos el inventario de las coloraciones no equivalentes sustituyendo, en la indicatriz de ciclos $J_{[S_n]^2}$, cada variable y_j por $x_1^j + x_2^j$. El resultado es el inventario de grafos no isomorfos clasificados por el número de aristas: en la expresión que obtengamos, el número de grafos no isomorfos con, digamos, t aristas, es⁸ el coeficiente de $x_1^t x_2^{n-t}$. Lo vemos en un par de ejemplos.

EJEMPLO 16.3.6 *El número de grafos no isomorfos con 2, 3 y 4 vértices.*

Empecemos con $n = 2$ vértices, un caso especialmente sencillo, que podríamos analizar a mano. Aquí, el número máximo de aristas es $N = \binom{2}{2} = 1$. Como el entero 2 sólo tiene dos particiones, $2 = 2$ y $2 = 1 + 1$, sólo hay dos sumandos en la suma anterior, las elecciones $b_1 = 2, b_2 = 0$ y $b_1 = 0, b_2 = 1$. La función indicatriz de ciclos de $[S_2]^2$ viene dada por

$$\begin{aligned} J_{[S_2]^2}(y_1, y_2) &= \sum_{\substack{b_1, b_2 \geq 0 \\ b_1 + 2b_2 = 2}} \frac{1}{b_1! b_2! 1^{b_1} 2^{b_2}} \left[y_2^{b_1 b_2} \right] \left[y_1^{1\binom{b_1}{2}} y_2^{2\binom{b_2}{2}} \right] \left[y_1^{b_1 0} \right] \left[y_2^{0 b_2} y_1^{b_2} \right] \\ &= \sum_{\substack{b_1, b_2 \geq 0 \\ b_1 + 2b_2 = 2}} \frac{1}{b_1! b_2! 1^{b_1} 2^{b_2}} y_2^{b_1 b_2} y_1^{\binom{b_1}{2}} y_2^{2\binom{b_2}{2}} y_1^{b_2} = \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_1 = y_1 \end{aligned}$$

(obsérvese que la función solo depende de una variable). Ahora podemos enumerar las coloraciones no equivalentes por $[S_2]^2$ con dos colores; si llamamos Ω_2 a este conjunto de coloraciones, su inventario es

$$I_{\Omega_2}(x_1, x_2) = J_{[S_2]^2}(x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2) = x_1 + x_2,$$

de donde leemos, directamente, que hay un grafo con una arista y otro sin aristas.

El caso $n = 3$ es más laborioso. Tenemos hasta $N = \binom{3}{2} = 3$ aristas posibles y tres particiones posibles: $3 = 1 + 1 + 1$, $3 = 1 + 2$ y $3 = 3$, que se corresponden con las elecciones

$$b_1 = 3, b_2 = b_3 = 0, \quad b_1 = b_2 = 1, b_3 = 0 \quad \text{y} \quad b_1 = b_2 = 0, b_3 = 1,$$

que, trasladadas a la indicatriz de los ciclos de $[S_3]^2$ nos da

$$\begin{aligned} J_{[S_3]^2}(y_1, y_2, y_3) &= \sum_{\substack{b_1, b_2, b_3 \geq 0 \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 3}} \frac{1}{b_1! b_2! b_3! 1^{b_1} 2^{b_2} 3^{b_3}} \left[y_2^{b_1 b_2} y_3^{b_1 b_3} y_6^{b_2 b_3} \right] \left[y_1^{\binom{b_1}{2}} y_2^{2\binom{b_2}{2}} y_3^{3\binom{b_3}{2}} \right] \left[y_3^{b_3} y_1^{b_2} \right], \\ &= \frac{1}{3!} [y_1^3 + 3 y_1 y_2 + 2 y_3]. \end{aligned}$$

⁷Por corrección política, evitamos usar el verbo que realmente se viene a la cabeza a la vista de tamaña expresión.

⁸O, si queremos, como en el ejemplo 16.3.3, podemos asignar a la variable x_2 (la que representa la ausencia de la arista) el valor 1, y tomar $x_1 = x$. Entonces, la respuesta está, simplemente, en el coeficiente de x^t .

No es muy difícil seguir la pista a las permutaciones de S_3 que generan esta estructura de ciclos: la identidad fija las tres posibles aristas (y es la que se corresponde con el término y_1^3), hay tres permutaciones que fijan 1 arista y mueven las otras dos en un ciclo de longitud 2 (justo las que intercambian los elementos de la arista que queda fija), y hay dos permutaciones que mueven cíclicamente las 3 aristas (las que mueven cíclicamente los elementos $\{1, 2, 3\}$).

Ahora sólo queda aplicar el teorema de Pólya para obtener el inventario de las coloraciones no equivalentes por S_3 con dos colores, Ω_3 , que resulta darnos también la información sobre los grafos no isomorfos con 3 vértices:

$$I_{\Omega_3}(x_1, x_2) = J_{[S_3]^2}(x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2, x_1^3 + x_2^3) = x_1^3 + x_2^3 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2.$$

Es decir, hay 1 grafo con tres aristas (véase el coeficiente de x_1^3), otro sin aristas, uno más con 2 aristas, y un último grafo con 1 arista. En total, hay $J_{\Omega_3}(1, 1) = 4$ grafos no isomorfos.

En el caso $n = 4$, tenemos hasta $\binom{4}{2} = 6$ aristas. La función indicatriz de los ciclos de $[S_4]^2$ se escribe, en una primera versión,

$$J_{[S_4]^2}(y_1, \dots, y_6) = \sum_{\substack{b_1, \dots, b_4 \geq 0 \\ \sum j b_j = 4}} \frac{1}{b_1! \dots b_4! 1^{b_1} \dots 4^{b_4}} \left[y_2^{b_1 b_2} y_3^{b_1 b_3} y_4^{b_1 b_4} y_6^{b_2 b_3} y_4^{2b_2 b_4} y_{12}^{b_3 b_4} \right] \\ \left[y_1^{\binom{b_1}{2}} y_2^{\binom{b_2}{2}} y_3^{\binom{b_3}{2}} y_4^{\binom{b_4}{2}} \right] \left[y_3^{b_3} \right] \left[\left(y_1^{b_2} \right) \cdot \left(y_4^{b_4} y_2^{b_4} \right) \right]$$

Las elecciones de b_1, \dots, b_4 , los sumandos que hemos de considerar, vienen dadas por las $p(4) = 5$ particiones de 4: $4 = 1 + 1 + 1 + 1$, $4 = 2 + 2$, $4 = 1 + 3$, $4 = 1 + 1 + 2$ y $4 = 4$. Obtenemos así que

$$J_{[S_4]^2}(y_1, \dots, y_6) = \frac{1}{4!} [y_1^6 + 8 y_3^2 + 9 y_1^2 y_2^2 + 6 y_2 y_4].$$

Es decir, hay una permutación de S_4 (la identidad) que fija las 6 aristas, 8 permutaciones que forman dos ciclos de longitud 3, etc. Ahora podemos obtener el inventario de las coloraciones no equivalentes con dos colores, Ω_4 :

$$I_{\Omega_4}(x_1, x_2) = J_{[S_4]^2}(x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2, x_1^3 + x_2^3, x_1^4 + x_2^4) \\ = x_1^6 + x_2^6 + x_1^5 x_2 + x_1 x_2^5 + 2 x_1^4 x_2^2 + 2 x_1^2 x_2^4 + 3 x_1^3 x_2^3.$$

Aquí tenemos el inventario de las $I_{\Omega_4}(1, 1) = 11$ coloraciones no equivalentes, esto es, de los 11 grafos no isomorfos con 4 vértices, clasificados por el número de aristas, que se corresponden con los dibujados al principio de esta subsección. Animamos al lector que se anime y se embarque en los cálculos de los casos $n = 5$ y $n = 6$ (véase el ejercicio 16.3.8). ♣

Coda de asombro

Es quizás momento de dedicar unos instantes a reflexionar sobre la pura estética del enfoque de las funciones generatrices (la teoría de Pólya) para tratar estos problemas de conteo de coloraciones no equivalentes.

(versión preliminar 25 de diciembre de 2008)

Dos ingredientes: primero, un objeto combinatorio en estado puro: coloraciones, asignaciones de color a elementos de un conjunto, y segundo, un grupo de simetrías del conjunto. La eficiencia de las funciones generatrices permite codificar la rica estructura de esas dos colecciones en sendos objetos únicos: inventarios I_Ω e indicatrices J_G .

El conjunto de simetrías actúa identificando coloraciones. Y la magia de las funciones generatrices, ahí radica la belleza del método, captura lo relevante de esa acción con un sencillo y directo cambio de variables:

$$I_\Omega(x_1, x_2, \dots, x_r) = J_G(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

¡Asombrosa y elegante potencia!

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 16.3

16.3.1 ¿Cuántos tiovivos “diferentes” se pueden formar usando ocho caballos idénticos salvo porque 2 son blancos, 2 negros y 4 marrones?

16.3.2 Una barra está dividida en 9 intervalos (con 8 marcas). ¿De cuántas maneras se puede pintar utilizando los colores rojo, azul y blanco? ¿De cuántas maneras se puede pintar si cada color se utiliza en tres intervalos? Por supuesto, coloraciones equivalentes por el volteo de la barra se consideran iguales.

16.3.3 Si se pintan las caras de un cubo con colores rojo, azul verde y blanco. ¿De cuántas maneras se pueden hacer? ¿De cuántas, si cada color se usa 2 veces?

16.3.4 Tenemos un conjunto \mathcal{X} y un grupo de sus simetrías G . Se dice que dos subconjuntos A y B de \mathcal{X} son equivalentes por G si existe una simetría g de G tal que

$$B = \{g(a) : a \in A\}$$

Compruébese que esto define una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, el conjunto de subconjuntos de \mathcal{X} . Compruébese que el número de clases de equivalencia viene dado por $J_G(2, 2, \dots, 2)$.

16.3.5 (Coloraciones y listas) Tenemos un conjunto de r colores para usar en un conjunto \mathcal{X} de tamaño n . Podemos interpretar las coloraciones como listas (con repetición permitida) de longitud n con los colores $\{1, 2, \dots, r\}$, y viceversa. Obsérvese que, contra la costumbre, numeramos aquí los colores, y no los elementos de \mathcal{X} .

Tenemos además un grupo G de simetrías de \mathcal{X} , que interpretamos como simetrías de las coloraciones, es decir, de las listas. Cerciórese de que dos listas son equivalentes por G si en posiciones identificadas por algún $g \in G$ tienen los mismos colores, es decir, los mismos elementos de $\{1, 2, \dots, r\}$.

Compruébese que el número de listas de longitud n con r elementos no equivalentes viene dado por

$$J_G(r, r, \dots, r).$$

Cuando $G = \{\text{id}\}$, debemos obtener r^n , ¿por qué? Compruébese que así es a partir de la expresión anterior.

Cuando $G = S_n$, verifíquese combinatoriamente que el número de listas de longitud n con r elementos no equivalentes por S_n es el número de multiconjuntos extraídos de $\{1, 2, \dots, r\}$ de tamaño n , es decir, $\binom{n+r-1}{r-1}$. Obténgase este resultado a partir de la expresión 16.2.4 de la página 1106.

16.3.6 (Coloraciones y multiconjuntos). Tenemos un conjunto \mathcal{X} de tamaño n y el conjunto infinito de colores $\{0, 1, 2\}$ colorear \mathcal{X} . Obsérvese que hay infinitos colores, y que uno de ellos es

(versión preliminar 25 de diciembre de 2008)

el 0. Podemos interpretar esas coloraciones como multiconjuntos: cada color indica el número de repeticiones de ese elemento; obsérvese el papel del cero.

Tenemos además un grupo G de simetrías de \mathcal{X} . Decimos que dos multiconjuntos son equivalentes por G si las correspondientes coloraciones lo son. Sea Ω una colección de multiconjuntos no equivalentes.

Denotemos por $\beta_k(G)$ el número de multiconjuntos no equivalentes bajo G y de tamaño k . Compruébese que

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(G) t^k = I_{\Omega}(t^0, t^1, t^2, \dots) = J_G\left(\frac{1}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \dots, \frac{1}{1-t^n}\right)$$

a) Compruébese que cuando $G = \{id\}$, entonces $\beta_k(id)$ es el número de multiconjuntos de n símbolos de tamaño k , es decir, $\binom{n+k-1}{n-1}$, y dedúzcase esta expresión de la identidad anterior (*).

b) Compruébese que cuando $G = S_n$, entonces hay tantos multiconjuntos no equivalentes de tamaño k como soluciones (k_0, k_1, k_2, \dots) del sistema:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} j k_j = k \\ \sum_{j=0}^{\infty} k_j = n \end{cases}$$

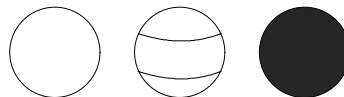
c) Dedúzcase que hay tantos multiconjuntos no equivalentes como particiones de k en a lo sumo n partes y que

$$J_{S_n}\left(\frac{1}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \dots, \frac{1}{1-t^n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} q_n(k) z^k,$$

donde $q_n(k)$ es el número de particiones de k con a lo sumo n partes.

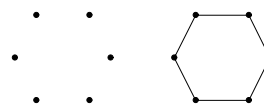
16.3.7 Volvamos al problema que planteábamos en el ejercicio 15.3.5 de las quince bolas de billar dispuestas sobre la mesa. Ahora tenemos bolas de tres tipos: las lisas, las decoradas con una franja y las negras.

¿De cuántas maneras no equivalentes podremos disponerlas sobre la mesa si queremos (como ocurre en el billar) que haya siete bolas lisas, siete rayadas y una negra? ¿Y si exigimos que la bola negra esté en la posición central (en mitad de la tercera fila)?



16.3.8 Hay 34 grafos no isomorfos con 5 vértices. Calcúlese $J_{[S_5]^2}$ para tenerlos clasificados por su número de aristas. ¡Dibújense!

Sudoku para una tarde de verano. Mismo reto para 6 vértices: hay 156. Dos de ellos son⁹ los que aparecen a la derecha.



⁹¡Vaya pista más generosa!